EPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE
MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

On considère l'application $g : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\{2k\pi i\}) \to \mathbb{C}$ définie par $g(z,t) = \frac{t\exp(tz)}{\exp(t)-1}$.

a) Montrer que g est continue, et peut être étendue continûment sur $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}-\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\{2k\pi i\})\bigcup\{0\}$. On note encore g cette extension. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $g(z,t)$ admette un développement en série

$$g(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\frac{t^n}{n!}\,,$$

convergent pour tout $(z,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$ tel que $|t| < \epsilon$.

b) Montrer que $P_n(z)$ est un polynôme en z de degré n à coefficients rationnels.

c) Montrer que $P_n(z+1) - P_n(z) = nz^{n-1}$.

d) Montrer qu'il existe pour tout n dans $\mathbb{N}$ un unique polynôme $S_{n+1}(z)$ en la variable z de degré $(n+1)$ tel que, pour tout m dans $\mathbb{N}$ avec $m \neq 0$,

$$S_{n+1}(m) = 1 + 2^n + \ldots + m^n$$

e) Montrer que

$$P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_k(x)y^{n-k}\,.$$

f) Montrer que, pour tout m dans $\mathbb{N}$ avec $m \neq 0$,

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}P_n(z+\frac{k}{m}) = m^{-n}P_n(mz)\,.$$

g) Pour tout $n \geq 1$, soit $S_{n+1}(z)$ le polynôme construit en d). On note $X = S_2(z)$, $Y = S_3(z)$ ces deux premiers polynômes. Montrer que pour tout $k \geq 1$, il existe des polynômes R_k et Q_k à coefficients rationnels tels que

$$S_{2k}(z) = X^2R_k(X), \qquad S_{2k+1}(z) = YQ_k(X)\,.$$

EPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE
MATHEMATIQUES

EXERCICE 2

a) Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $n \neq 0$. Soit $f \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme complexe tel que $\deg f \leq n$, et soient $z_1, \ldots, z_n$ les racines du polynôme $z^n + 1$. Montrer que

$$xf'(x) = \frac{n}{2} f(x) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(xz_k) \frac{2z_k}{(z_k - 1)^2}$$

(Indication : utiliser la formule d'interpolation de Lagrange

$$g(z) = \sum_{l=1}^{n} g(\alpha_l) \frac{(z-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (z-\alpha_{l-1}) \cdot (z-\alpha_{l+1}) \cdot \ldots \cdot (z-\alpha_n)}{(\alpha_l - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_l - \alpha_{l-1}) \cdot (\alpha_l - \alpha_{l+1}) \cdot \ldots \cdot (\alpha_l - \alpha_n)}$$

où $g(z)$ est un polynôme complexe tel que $\deg g \leq n-1$ et $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ sont des nombres complexes deux à deux distincts; prendre $g(z) = \frac{f(xz)-f(x)}{z-1}$; pour conclure, considérer le cas spécial $f(x) = x^n$).

Pour $f \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme complexe, on pose $\|f\| = \max_{\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z|=1\}} |f(z)|$.

b) Soit $f \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme complexe tel que $\deg f \leq n$. Soient $z_0, \ldots, z_d$ les racines du polynôme $z^{d+1} - 1$ où $d > n$. Montrer que s'il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts dans $\{z_0, \ldots, z_d\}$ tels que $|f(\alpha_i)| \leq 2^{-d}$ pour tout $0 \leq i \leq n$, alors $\|f\| < 1$. (Indication : utiliser la formule d'interpolation de Lagrange pour f.)

c) Soient $f, g \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f = n$, $\deg g = m$. On pose $d = n + m$. Montrer que

$$\|f\| \cdot \|g\| \leq 2^{2d} \|f \cdot g\| \ .$$

(Indication: considèrer $(f \cdot g)(z_i)$, $0 \leq i \leq n$, et utilizer b).)

d) Soit $f \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f = n$. Montrer que $\|f'\| \leq n \|f\|$.

e) Montrer que si toutes les racines d'un polynôme réel $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, où $n \geq 2$, sont réelles et deux à deux distinctes, alors

$$a_i^2 > \frac{n-i+1}{n-i} \cdot \frac{i+1}{i} a_{i-1} a_{i+1}$$

pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

f) Soit $f \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme réel de la forme

$$x^n \pm a x^{n-1} - b_{n-2} x^{n-2} - \ldots - b_0$$

où $b_i \geq 0$, $b_0 \neq 0$, $n \geq 2$. Montrer que f possède une unique racine dans l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x > 0$.

g) Soit $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_0 \neq 0$, $n \geq 2$, montrer, pour toute racine complexe z de f, que

$$-\beta \leq \operatorname{Re} z \leq \alpha$$

où α est l'unique racine strictement positive du polynôme

$$x^n + \operatorname{Re} a_{n-1}x^{n-1} - |a_{n-2}|x^{n-2} - \ldots - |a_0|$$

et où β est l'unique racine strictement positive du polynôme

$$x^n - \operatorname{Re} a_{n-1}x^{n-1} - |a_{n-2}|x^{n-2} - \ldots - |a_0|$$

EPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE
MATHEMATIQUES

EXERCICE 3. *(Recommandé pour les candidats de la discipline secondaire)*

On rappelle que $\mathbb{C}[x]$ est l'ensemble de tous les polynômes en la variable x à coefficients complexes. On rappelle qu'un polynôme $h \in \mathbb{C}[x]$ est appelé un diviseur d'un polynôme non nul $f \in \mathbb{C}[x]$ s'il existe un polynôme $r \in \mathbb{C}[x]$ tel que $f = h \cdot r$.

On considère $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ deux éléments de $\mathbb{C}[x]$ tels que $f \neq 0$ et $g \neq 0$ et n et m sont deux éléments de $\mathbb{N}$, $n \neq 0$, $m \neq 0$.

a) Montrer que les polynômes non nuls f et g ont une racine commune si et seulement s'ils ont un diviseur commun de degré au moins égal à un.

b) Montrer que les polynômes non nuls f et g dans $\mathbb{C}[x]$ ont un diviseur commun de degré au moins égal à un si et seulement s'il existe deux polynômes q et p dans $\mathbb{C}[x]$ tels que $fq = gp$, $(p, q) \neq (0, 0)$, $\deg(p) \leq n - 1$ et $\deg(q) \leq m - 1$.

c) On suppose que $n = 2$ et $m = 3$. On considère la matrice $(m + n) \times (m + n)$ définie par

$$S(f,g) = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les polynômes non nuls f et g ont un diviseur commun de degré au moins égal à un si et seulement si $\det S(f, g) = 0$.

d) Écrire la matrice $S(f, g)$ pour des arbitrares n et m, $n \geq 1$, $m \geq 1$, et montrer le résultat précédent pour quelqonques n and m, $n \geq 1$, $m \geq 1$.

e) On pose $R(f, g) = \det S(f, g)$. Soient $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ les racines complexes du polynôme f and $\{y_j\}_{j=1,\ldots,m}$ les racines complexes du polynôme g. Montrer que $R(f, g) = a_n^m b_m^n \widetilde{R}(f, g)$, ou $\widetilde{R}(f, g)$ est un polynôme en les variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$, à coefficients complexes, de degré au plus nm. Montrer que $R(f, g)$ est continu en $a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0$. Calculer $R(f, g)$ si $f = a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$.

f) Soit $P(z_1, \ldots, z_k)$ un polynôme en les variables $z_1, \ldots, z_k$, à coefficients complexes, qui vaut zéro si $z_1 = z_2$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q(z_1, \ldots, z_k)$ en les variables $z_1, \ldots, z_k$, à coefficients complexes, tel que

$$P = (z_1 - z_2) Q(z_1, \ldots, z_k) .$$

g) Montrer que

$$R(f,g) = a_n^m b_m^n \prod_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m} (x_i - y_j) = a_n^m \prod_{1 \leq i \leq n} g(x_i) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{1 \leq j \leq m} f(y_j) = (-1)^{nm} R(g,f).$$

h) Montrer que si $f = gq + r$, $\deg r \geq 1$, alors $R(g,f) = b_m^{n-m} R(g,r)$. Montrer que $R(f,gh) = R(f,g)R(f,h)$ pour tous les polynômes f, g, h, $\deg f \geq 1$, $\deg g \geq 1$, $\deg h \geq 1$.

i) Pour tous les entiers $r \geq 1$ et $s \geq 1$, pour tous les nombres complexes a et b, calculer $R(x^r - a, x^s - b)$, en raisonnant par récurrence sur $r + s$.

Pour tout polynôme f dans $\mathbb{C}[x]$ avec $\deg f \geq 2$, on pose $Q(f) = R(f, f')$, où f' est le polynôme dérivé de f.

j) Soit $f \in \mathbb{C}[x]$, avec $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ où $n \geq 2$. On pose $h(x) = (x-a)f(x)$. Montrer que $Q(h) = (-1)^n (f(a))^2 Q(f)$.

k) Soit $f \in \mathbb{R}[x]$, avec $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ où $n \geq 2$, tel que f ne possède pas de racine réelle. Montrer que $Q(f) \geq 0$.

l) Soit $f \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme à coefficients entiers, avec $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ où $n \geq 2$. Montrer que $Q(f)$ est de la forme $4k$ or $4k + 1$ où k est un nombre entier.

THE SCIENTIFIC KNOWLEDGE WRITTEN TEST. MATHEMATICS.

EXERCISE 1

Consider the function $g : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\{2k\pi i\}) \to \mathbb{C}$ defined by $g(z,t) = \frac{t\exp(tz)}{\exp(t)-1}$.

a) Prove that g is continous, and can be extended continuously on $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}-\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\{2k\pi i\})\bigcup\{0\}$. We denote again by g this extension. Show that there exists $\epsilon > 0$ such that $g(z,t)$ admits a series expansion

$$g(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\frac{t^n}{n!}$$

convergent for every $(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ such that $|t| < \epsilon$.

b) Show that $P_n(z)$ is a polynomial in z of degree n with rational coefficients.

c) Show that $P_n(z+1) - P_n(z) = nz^{n-1}$.

d) Show that for every n in $\mathbb{N}$ there exists a unique polynomial $S_{n+1}(z)$ in the variable z of degree $(n+1)$ such that, for every m in $\mathbb{N}$, $m \neq 0$,

$$S_{n+1}(m) = 1 + 2^n + \ldots + m^n.$$

e) Show that

$$P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k(x)y^{n-k}\,.$$

f) Show that, for every m in $\mathbb{N}$, $m \neq 0$,

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} P_n(z + \frac{k}{m}) = m^{-n}P_n(mz)\,.$$

g) For every $n \geq 1$, let $S_{n+1}(z)$ be the polynomial from d). Denote the first two polynomials by $X = S_2(z)$, $Y = S_3(z)$. Show that for every $k \geq 1$, there exist polynomials R_k and Q_k with rational coefficients such that

$$S_{2k}(z) = X^2R_k(X), \qquad S_{2k+1}(z) = YQ_k(X)\,.$$

THE SCIENTIFIC KNOWLEDGE WRITTEN TEST. MATHEMATICS.

EXERCISE 2

a) Let n be in $\mathbb{N}$, $n \neq 0$. Let $f \in \mathbb{C}[x]$ be a complex polynomial with $\deg f \leq n$, and let $z_1, \ldots, z_n$ be the roots of the polynomial $z^n + 1$. Prove that

$$xf'(x) = \frac{n}{2} f(x) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(xz_k) \frac{2z_k}{(z_k - 1)^2}$$

(Hint: use the Lagrange interpolation formula

$$g(z) = \sum_{l=1}^{n} g(\alpha_l) \frac{(z - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_{l-1}) \cdot (z - \alpha_{l+1}) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_n)}{(\alpha_l - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_l - \alpha_{l-1}) \cdot (\alpha_l - \alpha_{l+1}) \cdot \ldots \cdot (\alpha_l - \alpha_n)}$$

where $g(z)$ is a complex polynomial with $\deg g \leq n - 1$ and $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ are pairwise distinct complex numbers; take $g(z) = \frac{f(xz) - f(x)}{z - 1}$; in order to conclude consider the special case $f(x) = x^n$).

For $f \in \mathbb{C}[x]$ a complex polynomial, define $\|f\| = \max_{\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}} |f(z)|$.

b) Let $f \in \mathbb{C}[x]$ be a complex polynomial with $\deg f \leq n$. Let $z_0, \ldots, z_d$ be the roots of the polynomial $z^{d+1} - 1$, $d > n$. Show that if there exist $(n + 1)$ pairwise distinct roots $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \{z_0, \ldots, z_d\}$ such that $|f(\alpha_i)| \leq 2^{-d}$ for all $0 \leq i \leq n$, then $\|f\| < 1$. (Hint: use the Lagrange interpolation formula for f.)

c) Let $f, g \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f = n$, $\deg g = m$. Define $d = n + m$. Show that

$$\|f\| \cdot \|g\| \leq 2^{2d} \|f \cdot g\| \ .$$

(Hint: consider $(f \cdot g)(z_i)$, $0 \leq i \leq n$, and use b).)

d) Let $f \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f = n$. Show that $\|f'\| \leq n \|f\|$.

e) Show that if all the roots of the real polynomial $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, where $n \geq 2$, are real and pairwise distinct then

$$a_i^2 > \frac{n - i + 1}{n - i} \cdot \frac{i + 1}{i} a_{i-1} a_{i+1}$$

for all $1 \leq i \leq n - 1$.

f) Let $f \in \mathbb{R}[x]$ be a real polynomial of the form

$$x^n \pm a x^{n-1} - b_{n-2} x^{n-2} - \ldots - b_0$$

where $b_i \geq 0$, $b_0 \neq 0$, $n \geq 2$. Prove that f has a unique root on the set $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

g) Let $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_0 \neq 0$, $n \geq 2$, show that for any complex root z of f, one has

$$-\beta \leq \operatorname{Re} z \leq \alpha$$

where α is the unique positive root of the polynomial

$$x^n + \operatorname{Re} a_{n-1}x^{n-1} - |a_{n-2}|x^{n-2} - \ldots - |a_0|$$

and β is the unique positive root of the polynomial

$$x^n - \operatorname{Re} a_{n-1}x^{n-1} - |a_{n-2}|x^{n-2} - \ldots - |a_0|$$

THE SCIENTIFIC KNOWLEDGE WRITTEN TEST. MATHEMATICS.

EXERCISE 3. *(recommended for the secondary subject)*

Recall that $\mathbb{C}[x]$ is the set of all polynomials in the variable x with complex coefficients. Recall that a polynomial $h \in \mathbb{C}[x]$ is said to be a divisor of a non-zero polynomial $f \in \mathbb{C}[x]$ if $f = h \cdot r$ for some polynomial $r \in \mathbb{C}[x]$.

Consider $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ and $g = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ with $f \neq 0$ and $g \neq 0$, where n and m are two elements of $\mathbb{N}$, $n \neq 0$, $m \neq 0$.

a) Show that the non-zero polynomials f and g have a common root if and only if they have a common divisor whose degree is at least one.

b) Show that the non-zero polynomials f and g in $\mathbb{C}[x]$ have a common divisor whose degree is at least one if and only if there exist two polynomials q and p in $\mathbb{C}[x]$ such that $fq = gp$, $(p, q) \neq (0, 0)$, $\deg(p) \leq n - 1$ and $\deg(q) \leq m - 1$.

c) Assume that $n = 2$ and $m = 3$. Consider the $(m + n) \times (m + n)$ matrix

$$S(f,g) = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Show that the non-zero polynomials f and g have a common divisor whose degree is at least one if and only if $\det S(f,g) = 0$.

d) Write down the matrix $S(f,g)$ for arbitrary n and m, $n \geq 1$, $m \geq 1$, and prove the previous statement for arbitrary n and m, $n \geq 1$, $m \geq 1$.

e) Define $R(f,g) = \det S(f,g)$. Let $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ be the complex roots of the polynomial f and $\{y_j\}_{j=1,\ldots,m}$ be the complex roots of the polynomial g. Prove that $R(f,g) = a_n^m b_m^n \widetilde{R}(f,g)$, where $\widetilde{R}(f,g)$ is a polynomial in the variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ with complex coefficients of degree at most nm. Prove that $R(f,g)$ is continuous in $a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0$. Compute $R(f,g)$ if $f = a_n x^n$ with $a_n \neq 0$.

f) Let $P(z_1, \ldots, z_k)$ be a polynomial in the variables $z_1, \ldots, z_k$ with complex coefficients, which is equal to zero if $z_1 = z_2$. Prove that

$$P = (z_1 - z_2) Q(z_1, \ldots, z_k)$$

for some polynomial $Q(z_1, \ldots, z_k)$ in the variables $z_1, \ldots, z_k$ with complex coefficients.

g) Show that

$$R(f,g) = a_n^m b_m^n \prod_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq m}} (x_i - y_j) = a_n^m \prod_{1 \leq i \leq n} g(x_i) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{1 \leq j \leq m} f(y_j) = (-1)^{nm} R(g,f).$$

h) Show that if $f = gq + r$, $\deg r \geq 1$, then $R(g, f) = b_m^{\deg f - \deg r} R(g, r)$. Show that $R(f, gh) = R(f, g)R(f, h)$ for every polynomials f, g, h, $\deg f \geq 1$, $\deg g \geq 1$, $\deg h \geq 1$.

i) For every integers $r \geq 1$ and $s \geq 1$, and complex numbers a and b, calculate $R(x^r - a, x^s - b)$, by induction on $r + s$.

For a polynomial f in $\mathbb{C}[x]$ with $\deg f \geq 2$, define $Q(f) = R(f, f')$, where f' is the derivative of f.

j) Let $f \in \mathbb{C}[x]$, with $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ where $n \geq 2$, and define $h(x) = (x - a)f(x)$. Prove that $Q(h) = (-1)^n (f(a))^2 Q(f)$.

k) Let $f \in \mathbb{R}[x]$, with $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ where $n \geq 2$, be such that f has no real roots. Show that $Q(f) \geq 0$.

l) Let $f \in \mathbb{Z}[x]$ be a polynomial with integer coefficients, with $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ where $n \geq 2$. Show that $Q(f)$ is an integer number of the form $4k$ or $4k + 1$ where k is an integer number.